* R C - 0 7 6 6 / 6 0 0 *

RC-0766

Second Year B. Sc. Examination

April / May – 2010

Mathematics : Paper - V

(Linear Algebra) (New Course)

Time : 3 Hours] [Total Marks : **70**

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ ☛ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of ☛ signs on your answer book.

Name of the Examination :
☛ **S. Y. B. Sc.**

Name of the Subject :
☛ **Mathematics - 5 (New)**

☛ Subject Code No. : **0 7 6 6** ☛ Section No. (1, 2,.....) : **Nil**

Seat No. :

Student's Signature

(૨) **પ્રથમ** પ્રશ્ન **ફરજિયાત** છે.

(૩) જમણી બાજુના અંક પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

(૪) પ્રચલિત સંકેતોને અનુસરો.

૧ નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો : ૧૦

(૧) શું $f:(x,y) \to x^y$ એ N પર દ્વિક-ક્રિયા છે ? તમારા જવાબને સાર્થક કરો.

(૨) $\theta \in V$ માટે સાબિત કરો કે $\{\theta\}$ એ V નો ઉપાવકાશ છે.

(૩) શું ગણ $\left\{(3,1),\left(2,\frac{2}{3}\right)\right\}$ એ V_2નો આધાર છે ? કેવી રીતે ?

(૪) સુરેખ પરિવર્તન $T:V_3 \to V_2$ $T(x,y,z)=(x+y,x-z)$ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત હોય તો $N(T)$ શોધો.

(૫) શું શ્રેણિક $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&2\end{bmatrix}$ એ નિયમિત (non-singular) છે ? શક્ય હોય તો તેનું પ્રતીપ શોધો.

૨ (અ) સાબિત કરો કે વાસ્તવિક સંખ્યાની ક્રમિક n-ટુપલોનો ગણ તેમાંજ સરવાળા અને અદિશ ગુણાકારને સાપેક્ષ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે. ૫

(બ) સાબિત કરો કે પૂર્ણાંક સંખ્યાનો ગણ z એ મંડળ છે. શું તે એકમ ઘટક સાથે ક્રમિક છે ? કેવી રીતે ? ૪

(ક) ગણ $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ માટે સરવાળો (+) તથા ગુણાકાર (×) નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે : ૩

+	α	β	γ
α	α	β	γ
β	β	γ	α
γ	γ	α	β

×	α	β	γ
α	α	α	α
β	α	β	γ
γ	α	γ	β

ગણ S માટે નીચે દર્શાવેલ કયા ગુણધર્મનું સમાધાન થાય છે તે મેળવો.

(૧) ક્રમિક (+) (૨) તટસ્થ ઘટક (×) (૩) વ્યસ્ત ઘટક (×)

અથવા

૨ (અ) ધારો કે R^+ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. આ ગણ ઉપર સદિશ સરવાળો અને અદિશ ગુણાકાર નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે : ૫

$u + v = u \cdot v$, પ્રત્યેક $u, v \in R^+$

$\alpha u = u^{\alpha}$, પ્રત્યેક $u \in R^+$ અને વાસ્તવિક અદિશ α. સાબિત કરો કે R^+ વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે.

(બ) સમૂહ વ્યાખ્યાયિત કરો. સાબિત કરો કે સમૂહમાં એકમ તથા વ્યસ્ત ઘટક એક અને માત્ર એક જ હોય છે. ૪

(ક) ધારો કે z એ શૂન્ય ન હોય તેવો વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ છે. ગણ 2×2 માટે સરવાળો (+) તથા ગુણાકાર (×) નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે : ૩

$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_2 + x_2 y_1, x_2 y_2)$

$(x_1, x_2) \times (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$

નીચેના ગુણધર્મોને ચકાસો :

(૧) ક્રમિક (x) (૨) જૂથનો નિયમ (+) (૩) બંને ક્રિયા '+' અને 'x' માટે એકમ ઘટકનું અસ્તિત્વ છે.

૩ (અ) જો S એ સદિશાવકાશ Vનો અરિક્ત ઉપગણ છે, તો સાબિત કરો કે ૫

(૧) $[S] = S$ તો અને તો જ S, એ Vનો ઉપાવકાશ છે.

(૨) $[[S]] = [S]$

(બ) ધારો કે U અને W એ સદિશાવકાશ Vના ઉપાવકાશો છે. જો $p \in Z$ ને $p = u + w$; $u \in U$, $w \in W$ સ્વરૂપમાં અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાય તો સાબિત કરો કે $Z = U \oplus W$. ૪

(ક) જો U અને W એ સદિશ અવકાશ Vના બે ઉપાવકાશો છે તો સાબિત કરો કે તો $U + W = U$ તો અને તો જ $W \subset U$. ૩

અથવા

૩ (અ) સદિશ અવકાશ Vના n-ઘટકો $v_1, v_2, \ldots, v_n$ માટે સાબિત કરો કે ૫

(૧) $[v_1, v_2, \ldots, v_n] = [\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \ldots, \alpha_n v_n]$

(૨) $[v_1, v_2] = [v_1 - v_2, v_1 + v_2]$

(૩) જો $v_k \in [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}]$ હોય તો

$[v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n] =$

$[v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n]$

(બ) ધારો કે $S = \{(1, 2, 1), (1, 1, -1), (4, 5, -2)\}$ છે. તો નીચે આપેલ ૪
કયો સદિશ $[S]$માં છે, તે મેળવો :

(૧) $(2, -1, -8)$

(૨) $(1, -3, 5)$

(ક) સાબિત કરો કે : સદિશાવકાશ Vના ઉપાવકાશોનો છેદ પણ ઉપાવકાશ છે. ૩
બે ઉપાવકાશોના યોગ વિશે શું કહી શકાય ?

૪ (અ) સદિશ અવકાશ Vમાં $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ એ ક્રમિક ગણ છે, જ્યાં ૫
$v_1 \neq \theta$. સાબિત કરો કે $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ એ સુરેખ અવલંબી હોય
તો અને તો જ $u_k \in [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}]$ જ્યાં $2 \leq k \leq n$.

(બ) સાબિત કરો કે n-પરિમાણવાળા સદિશ અવકાશ Vમાં n-સુરેખ સ્વાયત્ત ૪
સદિશોનો ગણ Vનો આધાર છે.

(ક) (૧) જો U અને W એ સાન્ત પરિમાણીય સદિશાવકાશ Vના ૩
ઉપાવકાશો છે તથા $Z = U \oplus W$ હોય તો સાબિત કરો કે
$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$

(૨) $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ને બતાવવા
માટેનું ઉદાહરણ આપો.

અથવા

૪ (અ) ધારો કે સાન્ત પરિમાણીય સદિશાવકાશ Vનો એક ઉપગણ ૫
$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ સુરેખ સ્વાયત્ત છે. તો સાબિત કરો કે સદિશાવકાશ
Vમાં $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ એવા સદિશો મળે કે જેથી ગણ
$\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ એ V માટે આધાર હોય.

(બ) સદિશ અવકાશ Vમાં $[v_1, v_2, \ldots, v_n] = V$ તો સાબિત કરો કે : ૪
ગણ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ સુરેખ સ્વાયત્ત હોય તો અને તો જ $v \in V$
માટે $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ એક અને માત્ર એક જ છે.

(ક) V_3 નો કયો ઉપગણ આધાર છે તે જણાવો : ૩

(૧) $\{(1,1,1),(1,-1,1),(0,1,1)\}$

(૨) $\{(1,-2,1),(3,6,0),(2,0,1)\}$

૫ (અ) ધારો કે $T:U \to V$ એ સુરેખ માપ છે. તો સાબિત કરો કે $T:U \to V$ એ નિયમિત (Non-singular) હોય તો અને તો જ સુરેખ માપ $S:V \to U$ એવું અસ્તિત્વ ધરાવે કે જેથી $TS = IV$, $ST = IU$. ૫

(બ) આપેલ સુરેખ માપ માટે વ્યાપક નિયમ મેળવો : ૪

(૧) $T:V_2 \to V_2;\ T(2,1)=(2,3)$ અને $T(1,2)=(4,2)$

(૨) $T:V_2 \to V_4;\ T(1,1)=(1,1,1,1)$ અને $T(1,-1)=(-1,-1,-1,-1)$

(ક) જો U અને V બંને p-પરિમાણીય સદિશાવકાશ હોય તો સાબિત કરો કે : T એ વ્યાપ્ત છે $\Rightarrow r(T)=p \Rightarrow n(T)=0$. ૩

અથવા

૫ (અ) જો $T:U \to V$ એ સુરેખ પરિવર્તન છે. તો સાબિત કરો કે ૬

(૧) જો $T:U \to V$ $1-1$ હોય તો $N(T)$ એ Vનો શૂન્ય ઉપાવકાશ છે.

(૨) જો $u_1, u_2, \ldots, u_n$ એ Uના સુરેખ સ્વાયત્ત સદિશો હોય તો $T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)$ એ $R(T)$ ના સુરેખ સ્વાયત્ત સદિશો છે.

(બ) આપેલ સુરેખ પરિવર્તન માટે કોટિ-શૂન્યાંક પ્રમેય ચકાસો : ૬

$T:V_4 \to V_3$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે.

$T(e_1)=(3,5,7)$, $T(e_2)=(1,-1,1)$, $T(e_3)=(1,0,1)$, $T(e_4)=(-1,-1,0)$.

૬ (અ) ધારો કે $B_1=\{e_1,e_2,e_3\}$ અને $B_2=\{f_1,f_2\}$ એ V_3 અને V_2ના ક્રમિક પ્રમાણિત આધારો છે. ધારો કે સુરેખ પરિવર્તન $T:V_3 \to V_2$ એ $T(e_1)=2f_1-f_2$, $T(e_2)=f_1+2f_2$ અને $T(e_3)=0\cdot f_1+0\cdot f_2$ પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે. $T(x_1,x_2,x_3)$ શું હોઈ શકે ? સુરેખ માપ $T(x_1,x_2,x_3)$ને સંબંધિત શ્રેણિક $(T:B_1,B_2)$ મેળવો : જ્યાં $B_1=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$; $B_2=\{(1,1),(1,-1)\}$. ૮

(બ) સાબિત કરો કે : અંતર્ગુણાનાવકાશમાં કોઈ પણ શૂન્યેતર સદિશોનો લંબસદિશ ગણ સુરેખ સ્વાયત્ત છે. ૪

અથવા

૬ (અ) ધારો કે શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ એ V_2 અને V_3ના ક્રમિક આધારો ૬

$B_1 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ અને $B_2 = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ સાથે સંકળાયેલ છે. તો તેને સંગત સુરેખ પરિવર્તન મેળવો.

(બ) ગ્રામ સ્મિડટ પદ્ધતિથી સુરેખ સ્વાયત્ત ગણ $\{(1, 5, 2), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ ને લંબાત્મક બનાવો. ૬

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) As per the instruction No. **1** of Page No. **1**.
(2) **First** question is **compulsory**.
(3) Figures to the right indicate marks of the question.
(4) Follow usual notations.

1 Answer the following questions : **10**

(1) Is $f:(x,y) \to x^y$ a binary operation on N ? Justify your answer.

(2) Prove that $\{\theta\}$ is a subspace of V for $\theta \in V$.

(3) Is the set $\left\{(3, 1), \left(2, \frac{2}{3}\right)\right\}$ basis of V_2 ? How ?

(4) Find $N(T)$ for a linear transformation $T: V_3 \to V_2$ defined by $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$.

(5) Is a matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ non-singular ? Find its inverse if possible.

2 (a) Prove that the set of all ordered n-tuples of real numbers with respect to addition and scalar multiplication in it is a real vector-space. **5**

(b) Prove that the set Z of integers is a ring. Is it a commutative with unit element ? How ? **4**

(c) Define : Addition '+' and Mulitplication '×' on the set $S = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ with following table : **3**

$+$	α	β	γ
α	α	β	γ
β	β	γ	α
γ	γ	α	β

$\times$	α	β	γ
α	α	α	α
β	α	β	γ
γ	α	γ	β

Determine which of the following properties are satistifie for the set S :

(1) Commutative (+) (2) Identify (×) (3) Inverse (×)

OR

2 (a) Let R^+ be the set of all positive real numbers. Define the operations addition and scalar multiplication as follows : **5**

$u + v = u \cdot v$ for all $u, v \in R^+$

$\alpha \cdot u = u^\alpha$ for all $u \in R^+$ and real scalar α. Prove that R^+ is a real vector space.

(b) Define group. Prove that the identity and inverse element in a group G is always unique. **4**

(c) Let z be the set of non-zero real numbers. Define addition (+) and multiplication (×) on 2×2 as follows : **3**

$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_2 + x_2 y_1, x_2 y_2)$

$(x_1, x_2) \times (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$

Verify the following properties : (1) commutative (×) (2) associative (+) (3) Identity exists for both operation '+' and '×'.

3 (a) If S is a non-empty subset of a vectorspace V then prove that **5**

(1) $[S] = S$ iff S is a subspace of V (2) $[[S]] = [S]$

(b) Let U and W be two subspaces of a vectorspace V. **4**
If $p \in Z$ can be expressed uniquely as the sum **4**
$p = u + w$; $u \in U$, $w \in W$ then prove that $Z = U \oplus W$.

(c) If U and W are two subspaces of a vectorspace V then prove that $U + W = U$ iff $W \subset U$. **3**

OR

3 (a) Prove that : for n-elements $v_1, v_2, \ldots, v_n$ of a vectorspace V, **5**

(1) $[v_1, v_2, \ldots, v_n] = [\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \ldots, \alpha_n v_n]$

(2) $[v_1, v_2] = [v_1 - v_2, v_1 + v_2]$

(3) If $v_k \in [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}]$ then

$[v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n] =$

$[v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n]$

(b) Let $S = \{(1, 2, 1), (1, 1, -1), (4, 5, -2)\}$. Determine which of the following vector belongs to $[S]$ 4

(1) $(2, -1, -8)$ (2) $(1, -3, 5)$

(c) Prove that : Finite Intersection of subspaces of a vectorspace V is also a subspace of V. What can you say about union of two subspace ? 3

4 (a) In a vectorspace V, let $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ is an ordered set of vectors with $v_1 \neq \theta$. Prove that the set $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ is L.D. iff $u_k \in [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}]$; $2 \le k \le n$. 5

(b) Prove that : In an n-dimensional vectorspace V, any set of n – L.I. vectors is a basis. 4

(c) (1) If U and W are subspaces of a finite dimensional vectorspace V and $Z = U \oplus W$ then show that $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$ 3

(2) Give an example to show that

$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

OR

4 (a) Let the set $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ be a linearly independent subset of an n-dimensional vectorspace V. Then prove that there exists vectors $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ in V such that the set $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ is a basis for V. 5

(b) In a vectorspace V, $[v_1, v_2, \ldots, v_n] = V$ prove that $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ is L.I. iff for $v \in V$ 4

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ is unique.

(c) Determine which of the following subset is a basis for V_3 : (1) $\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 1, 1)\}$ 3

(2) $\{(1, -2, 1), (3, 6, 0), (2, 0, 1)\}$

5 (a) Let $T : U \to V$ be a linear map then prove that $T : U \to V$ is non-singular iff there exists a linear map $S : V \to U$ such that $TS = IV$, $ST = IU$. 5

(b) Obtain the general rule for the given linear maps : **4**

(1) $T : V_2 \to V_2; T(2, 1) = (2, 3)$ and $T(1, 2) = (4, 2)$

(2) $T : V_2 \to V_4$; $T(1, 1) = (1, 1, 1, 1)$ and $T(1, -1) = (-1, -1, -1, -1)$

(c) If U and V be two p-dimensional vectospace then prove that T is on-to $\Rightarrow r(T) = p \Rightarrow n(T) = 0$. **3**

OR

5 (a) Let $T : U \to V$ be a linear transformation then prove that : **6**

(1) $N(T)$ is a zero subspace of U if T is $1 - 1$.

(2) If $u_1, u_2, \ldots, u_n$ are L.I. vectors of U then $T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)$ are L.I. vectors of $R(T)$.

(b) Verify Rank-Nullity theorem for linear transformation $T : V_4 \to V_3$ defined by $T(e_1) = (3, 5, 7)$, $T(e_2) = (1, -1, 1)$, $T(e_3) = (1, 0, 1)$, $T(e_4) = (-1, -1, 0)$. **6**

6 (a) Let $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ and $B_2 = \{f_1, f_2\}$ be a standard basis of V_3 and V_2 respectively. Let a transformation $T : V_3 \to V_2$, defined by the rule $T(e_1) = 2f_1 - f_2$, $T(e_2) = f_1 + 2f_2$ and $T(e_3) = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2$. What is $T(x_1, x_2, x_3)$? Obtain the matrix $(T : B_1, B_2)$ associated with a linear map $T(x_1, x_2, x_3)$ relative to Basis : $B_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$; $B_2 = \{(1, 1), (1, -1)\}$. **8**

(b) Prove that any orthogonal set of non-zero vectors in an inner product space V is L.I. **4**

OR

6 (a) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ be a matrix related to the ordered bases $B_1 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ of V_2 and V_3 respectively. Obtain the corresponding linear transformation. **6**

(b) Orthonormalized the L.I. set $\{(1, 5, 2), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ by Gram-Schmidt's process. **6**